

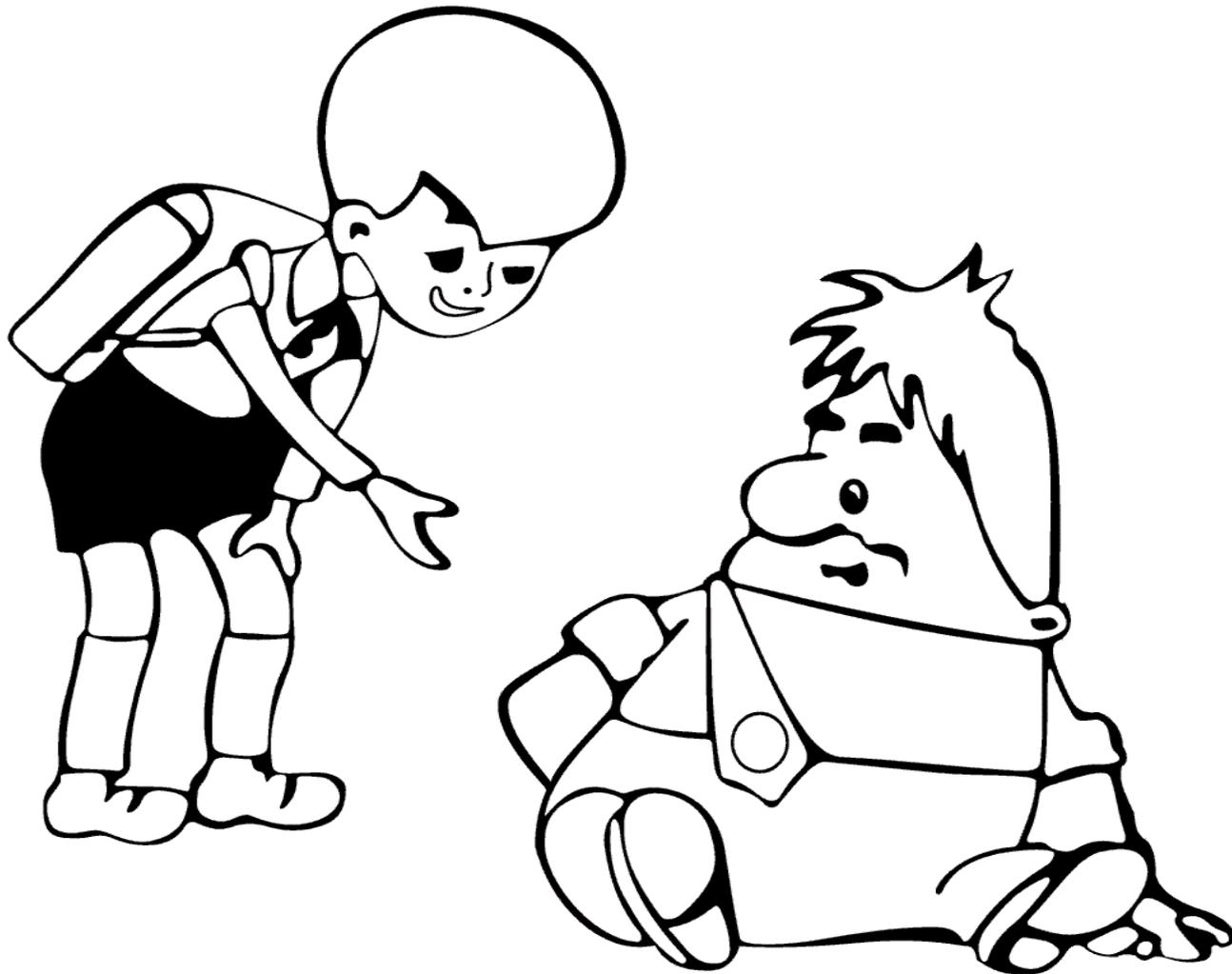


Раскраска спешит на помощь

Дмитрий Мацкевич

учитель математики Браславской гимназии

Детская раскраска

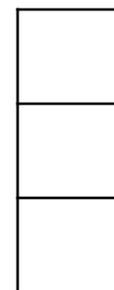
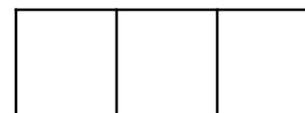
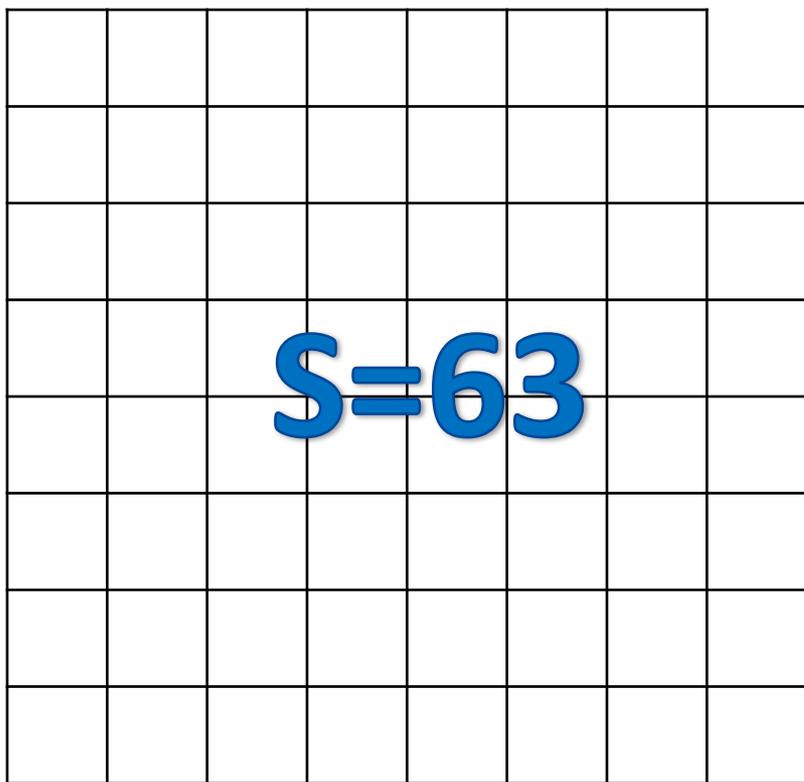


Цель

- ❖ узнаете, как метод раскраски используется при решении задач на замощение плоских фигур;
- ❖ выясните, какие виды раскрасок чаще всего используются при решении задач на замощение;
- ❖ рассмотрите решения задач с помощью различных видов раскрасок;
- ❖ * решите хотя бы одну задачу с использованием раскраски

Парадоксальность

№1. Можно ли замостить прямоугольными плитками размером 1×3 прямоугольную доску 8×8 , в которой вырезано одно угловое поле?



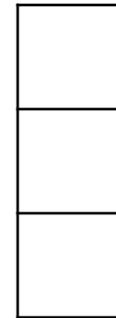
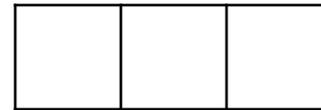
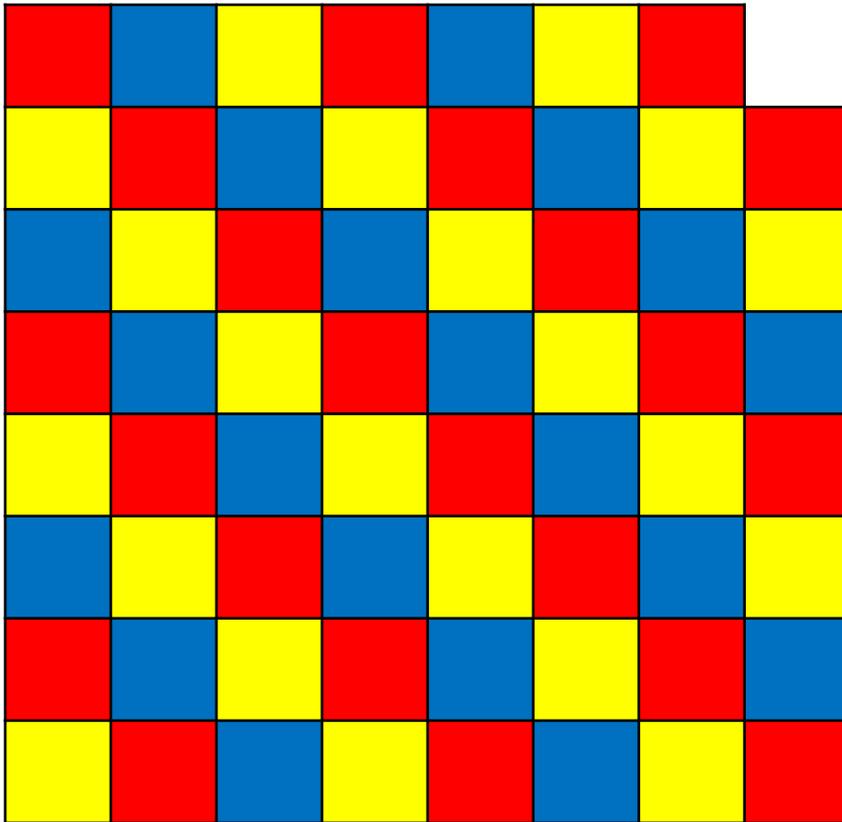
$$S=3$$

$$63:3=21 \text{ плитка}$$



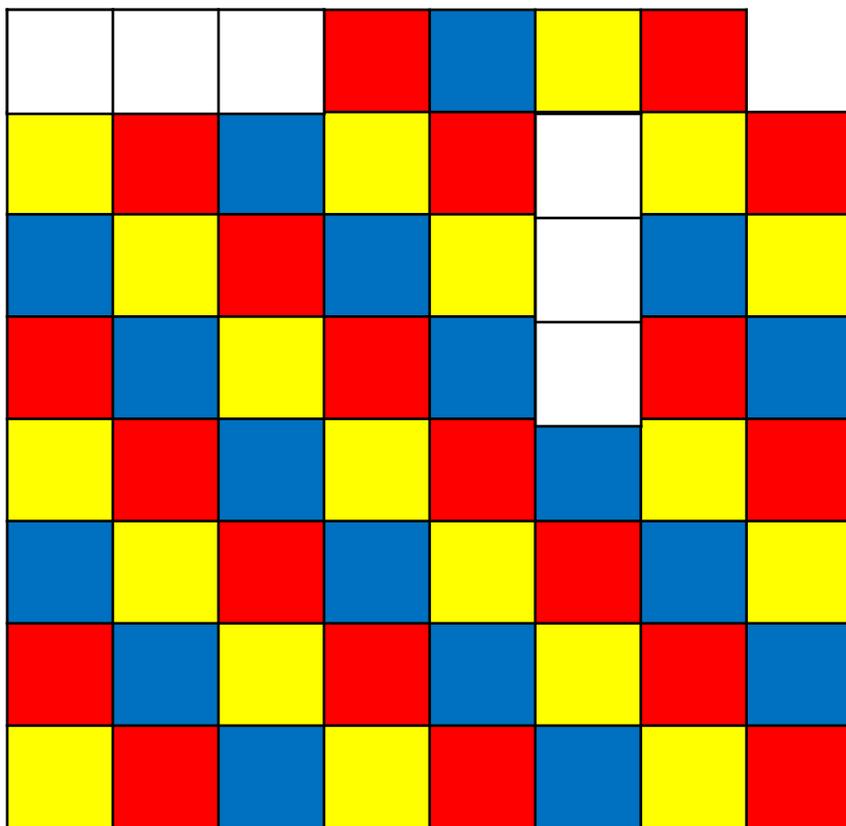
Раскраска в три цвета

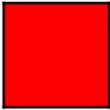
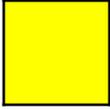
№1. Можно ли замостить прямоугольными плитками размером 1×3 прямоугольную доску 8×8 , в которой вырезано одно угловое поле?



Раскраска в три цвета

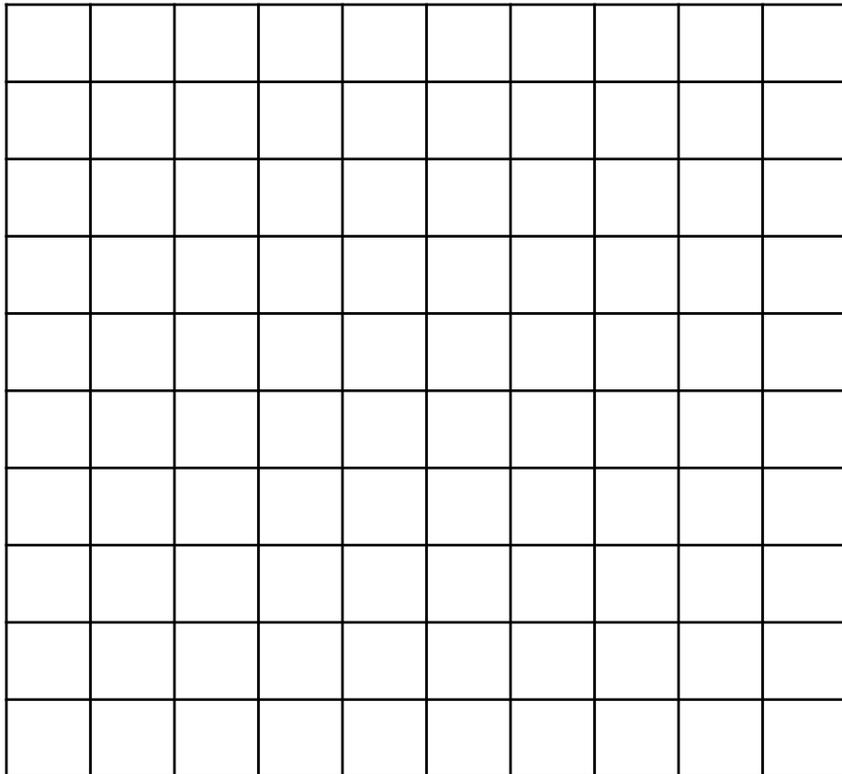
№1. Можно ли замостить прямоугольными плитками размером 1×3 прямоугольную доску 8×8 , в которой вырезано одно угловое поле?



 - 22 клетки
 - 20 клеток
 - 21 клетка

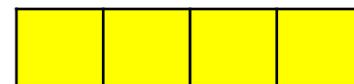
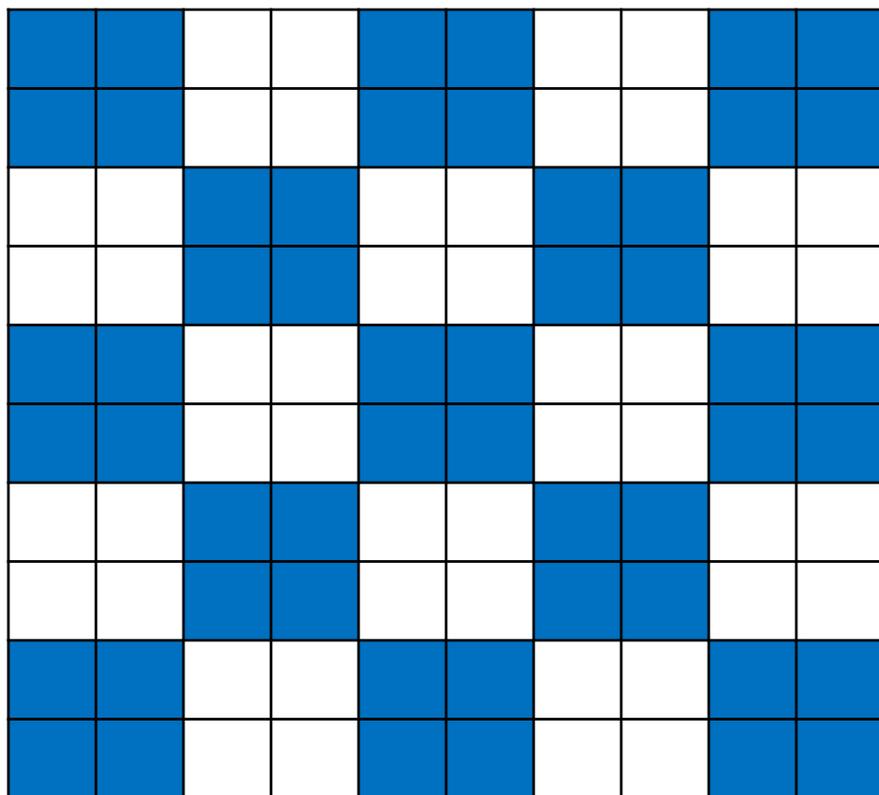
Какими могут быть раскраски

№2. Доказать, что клетчатую доску 10×10 нельзя замостить прямоугольниками 1×4 .



Раскраска 1

№2. Доказать, что клетчатую доску 10×10 нельзя замостить прямоугольниками 1×4 .

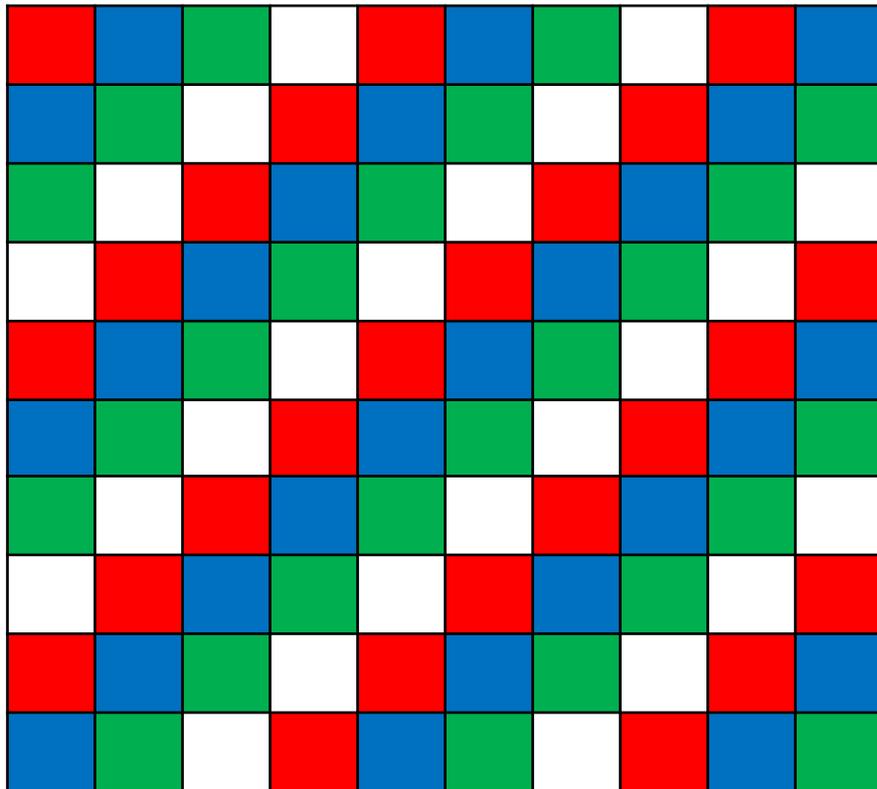


 - 48 клеток

 - 52 клетки

Раскраска 2

№2. Доказать, что клетчатую доску 10×10 нельзя замостить прямоугольниками 1×4 .



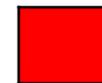
- 24 клетки



- 26 клеток



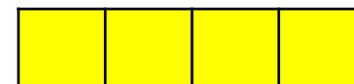
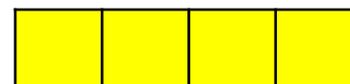
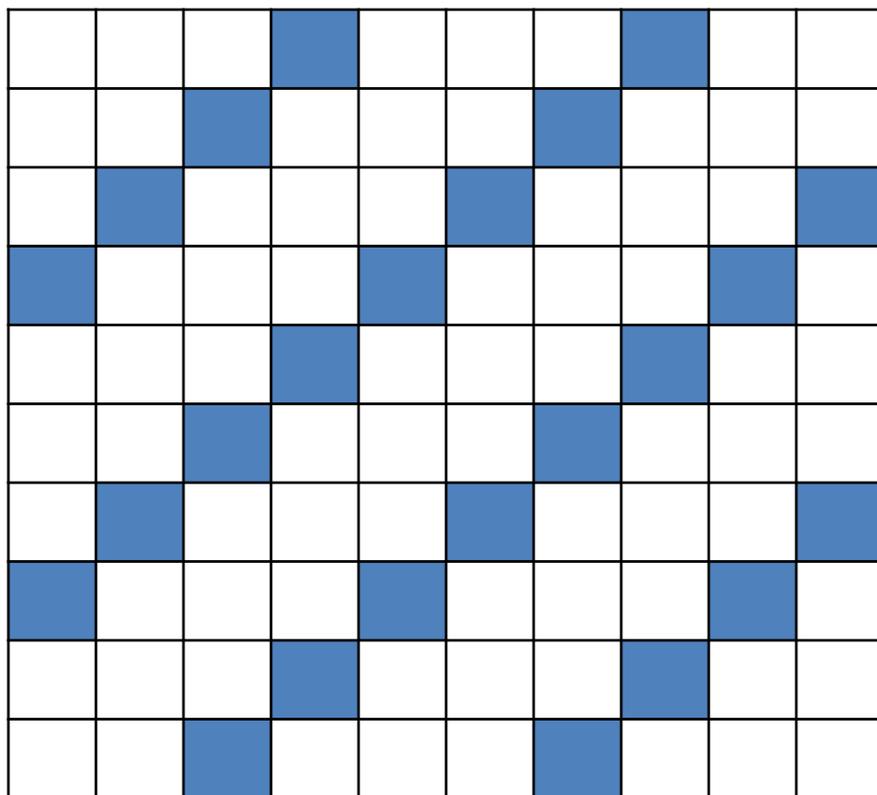
- 25 клеток



- 25 клеток

Раскраска 3

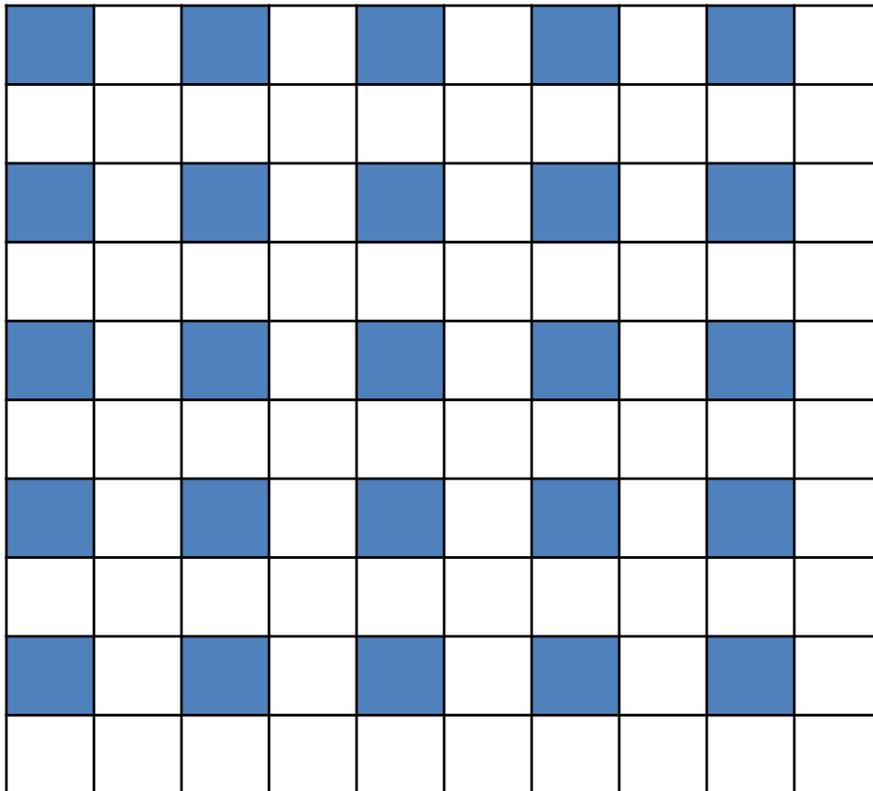
№2. Доказать, что клетчатую доску 10×10 нельзя замостить прямоугольниками 1×4 .



-24 клетки

Раскраска 4

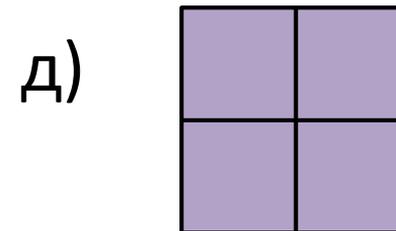
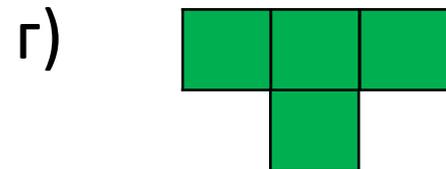
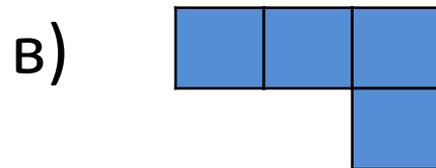
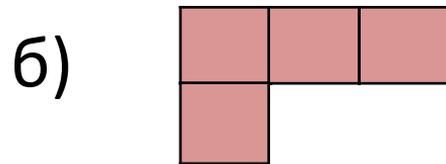
№2. Доказать, что клетчатую доску 10×10 нельзя замостить прямоугольниками 1×4 .



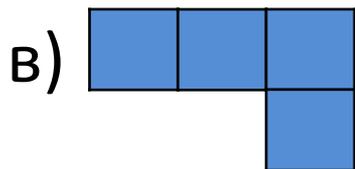
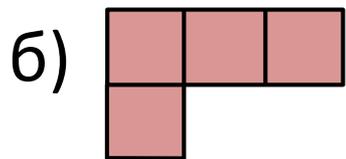
-25 клеток

Раскраска

№3. Какими фигурами из предложенных можно полностью замостить доску 10x10?



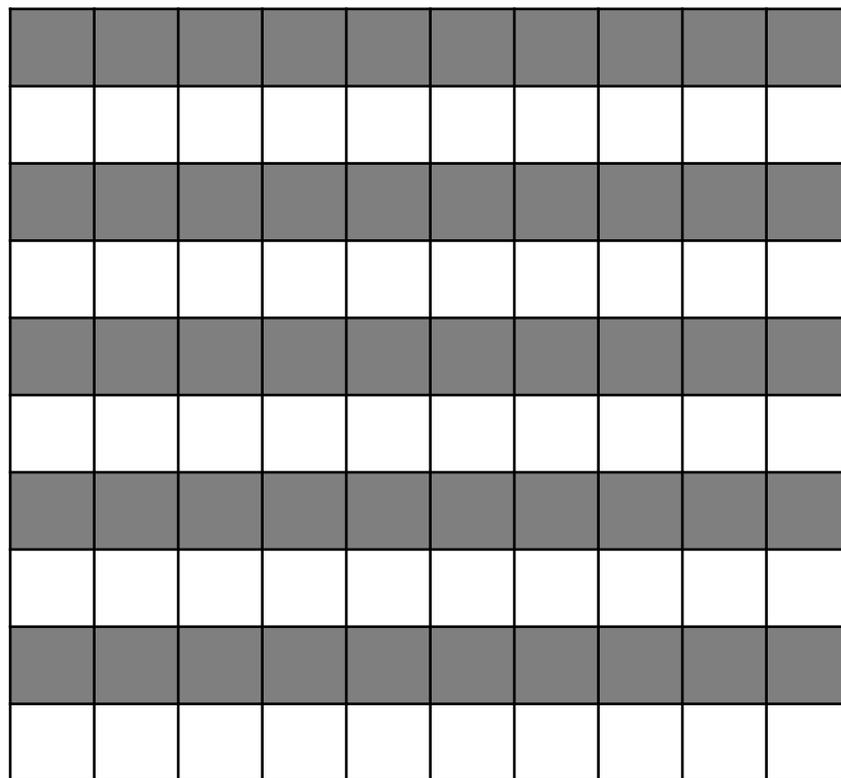
№3. Какими фигурами из предложенных можно полностью замостить доску 10x10?



Решение. Каждая фигура б) или в) закрывает 3 черные клетки и одну белую (пусть таких фигур будет x штук) или 3 белые клетки и одну черную (пусть таких фигур будет y штук). Тогда

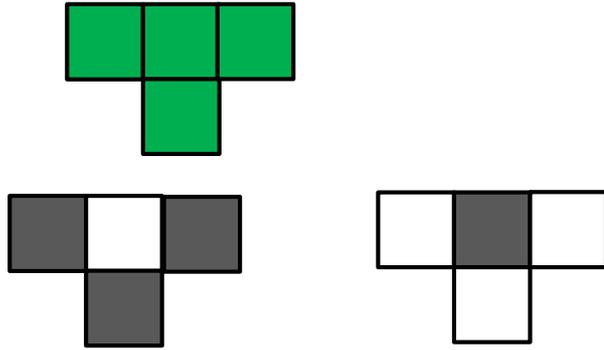
$$\begin{cases} x + y = 25, \\ 3x + y = 50; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 25, \\ 2x = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12,5, \\ y = 12,5. \end{cases}$$

Т.к. количество фигур $x = 12,5 \notin N$, то полное замощение невозможно.



№3. Какими фигурами из предложенных можно полностью замостить доску 10x10?

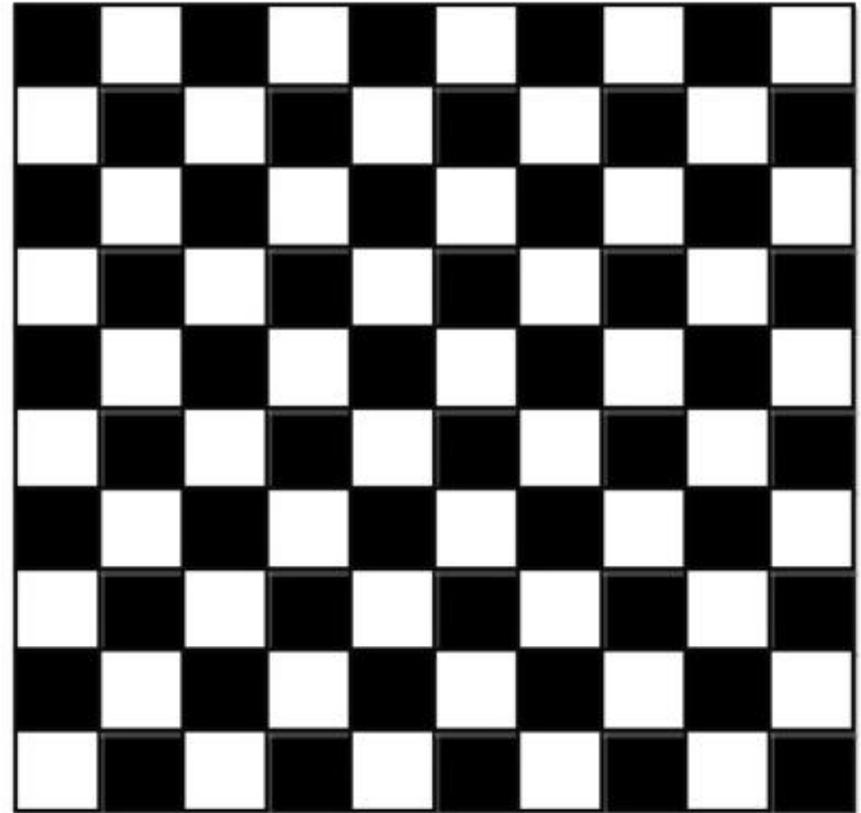
г)



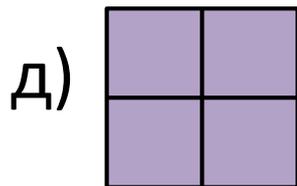
Решение. Каждая фигура г) закрывает 3 черные клетки и одну белую (пусть таких фигур будет x штук) или 3 белые клетки и одну черную (пусть таких фигур будет y штук). Тогда

$$\begin{cases} x + y = 25, \\ 3x + y = 50; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 25, \\ 2x = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12,5, \\ y = 12,5. \end{cases}$$

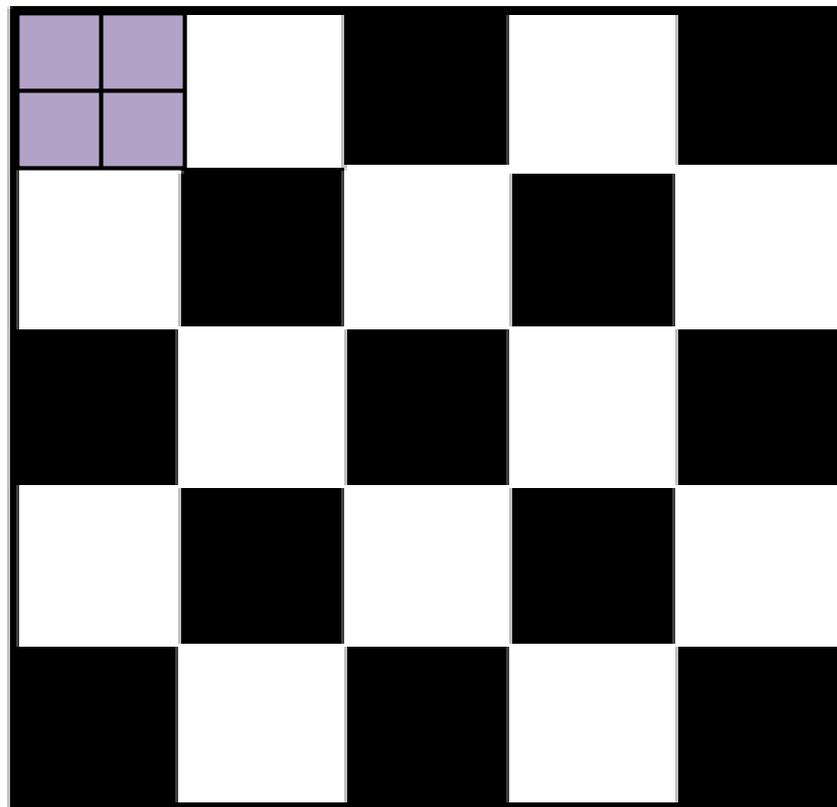
Т.к. количество фигур $x = 12,5 \notin N$, то полное замощение невозможно.



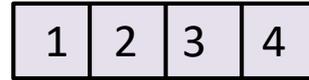
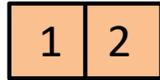
№3. Какими фигурами из предложенных можно полностью замостить доску 10x10?



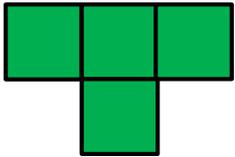
Решение. Можно замостить, например, так.



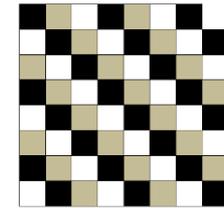
Рефлексия (промежуточная)



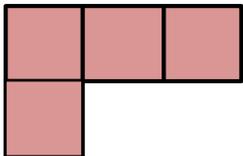
1) Для столбиков (прямоугольников) 1x2, 1x3, 1x4, ... чаще всего используется...



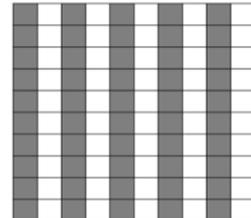
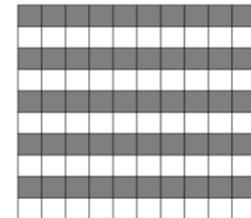
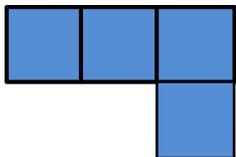
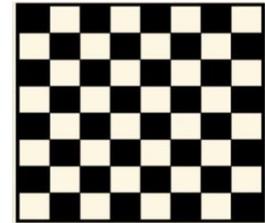
2) Для Т-образных плиток чаще всего используется...



1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

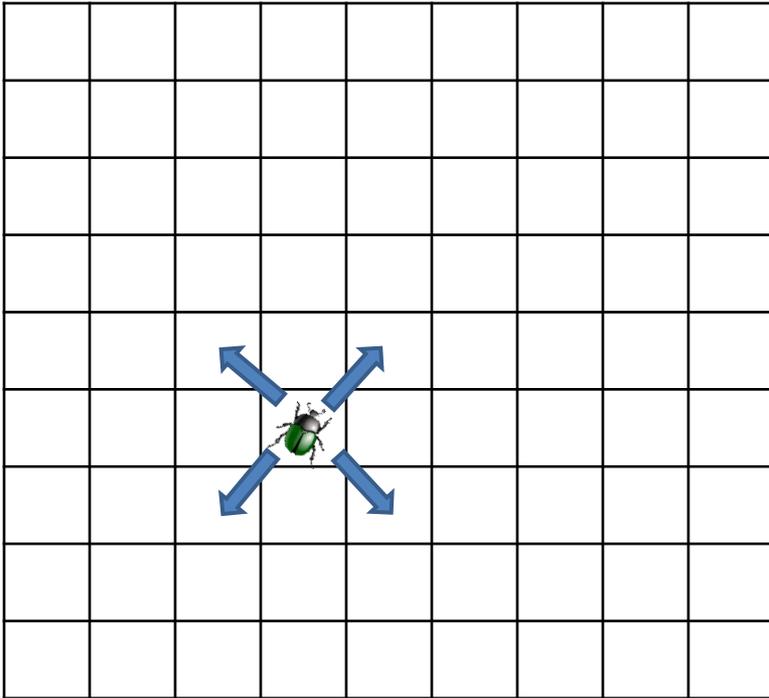


3) Для Г-образных или L-образных плиток чаще всего используется...



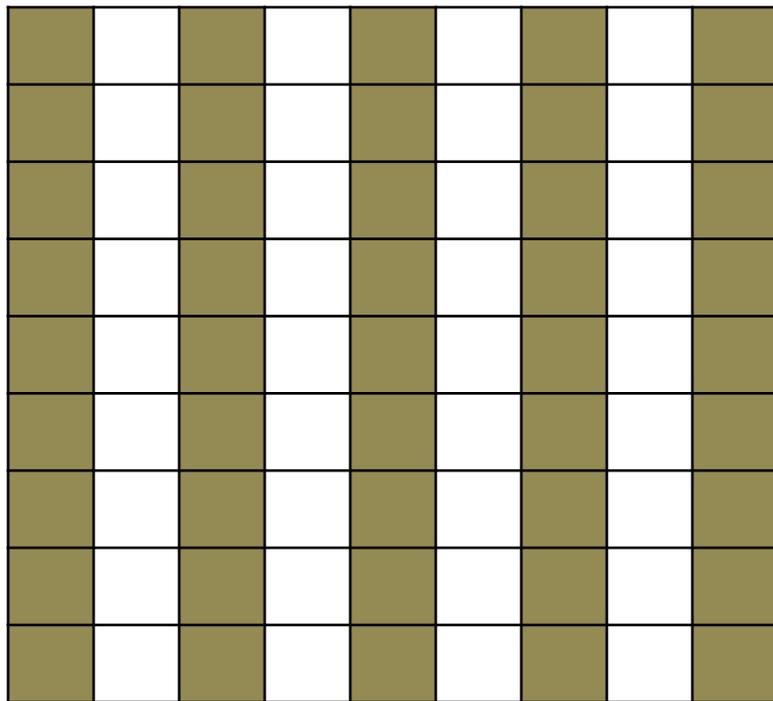
Задача

№4. В каждой клетке квадрата 9×9 сидит жук. По команде каждый жук перелетает на одну из соседних по диагонали клеток. Доказать, что по крайней мере 9 клеток после этого окажутся свободными.



Задача

В каждой клетке квадрата 9×9 сидит жук. По команде каждый жук перелетает на одну из соседних по диагонали клеток. Доказать, что по крайней мере 9 клеток после этого окажутся свободными.

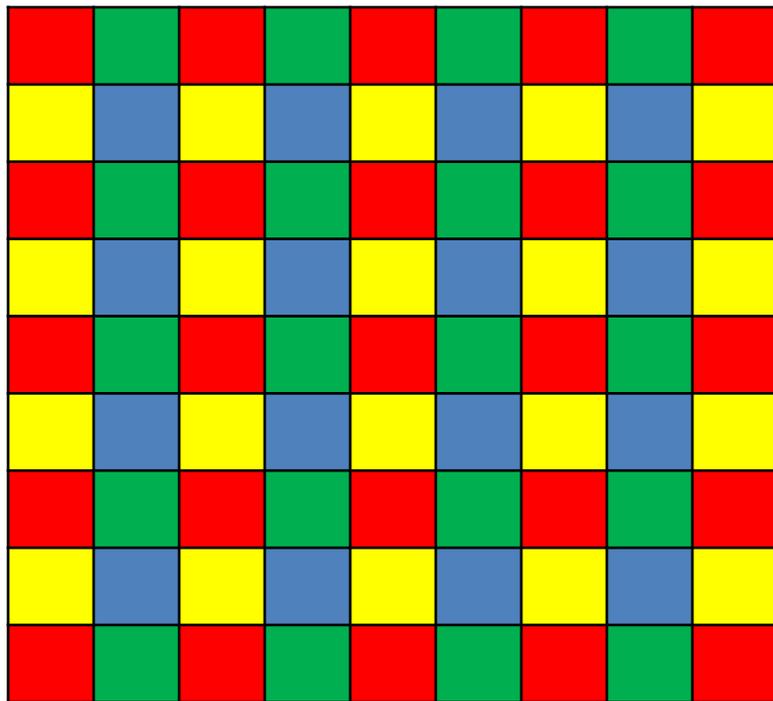


■ - 45 клеток

□ - 36 клеток

Задача

В каждой клетке квадрата 9×9 сидит жук. По команде каждый жук перелетает на одну из соседних по диагонали клеток. Доказать, что по крайней мере 9 клеток после этого окажутся свободными.



 - 25 клеток

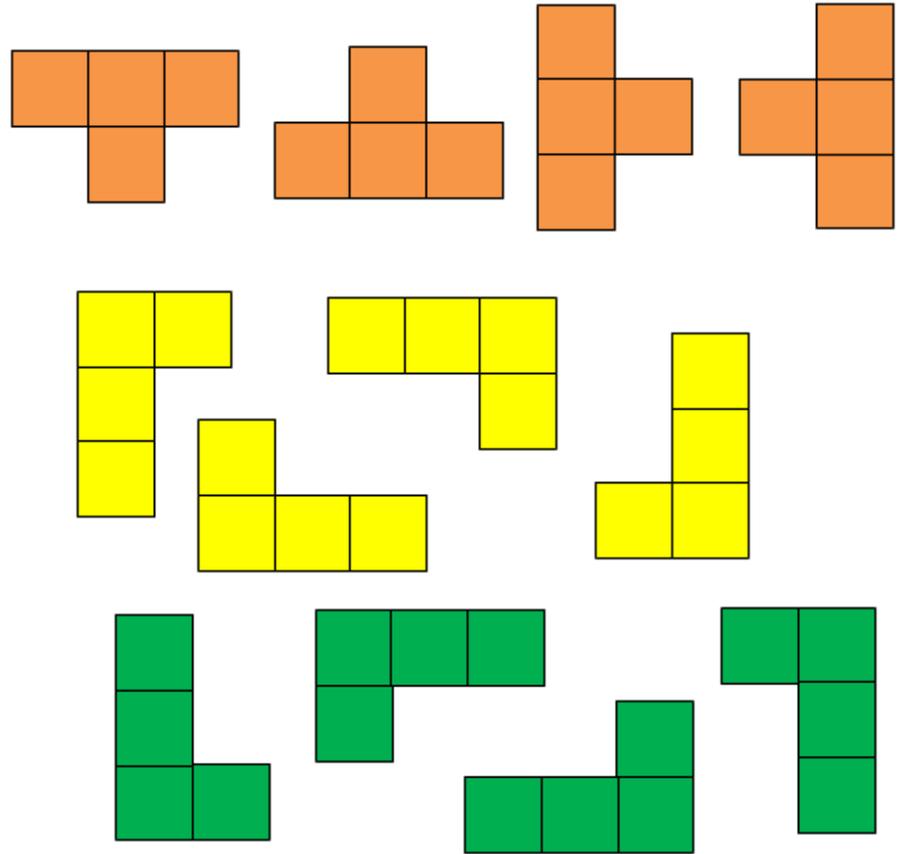
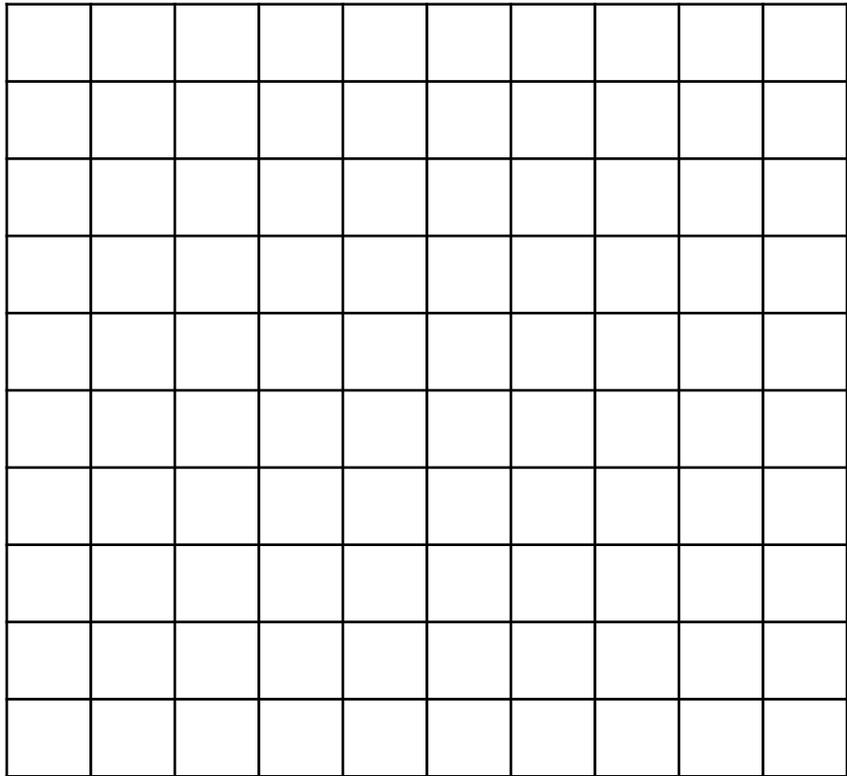
 - 16 клеток

 - 20 клеток

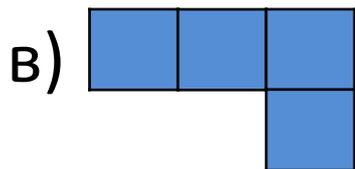
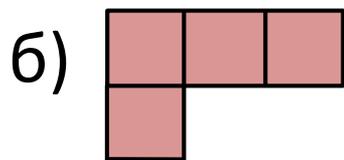
 - 20 клеток

Задача

№5. Клетчатая доска 10×10 замощается плитками двух типов: L-образными и T-образными. Плитки разрешается поворачивать и переворачивать. Каждая плитка состоит из 4 клеток, равных по размеру клеткам доски. Какое наибольшее число L-образных плиток может участвовать в замощении?

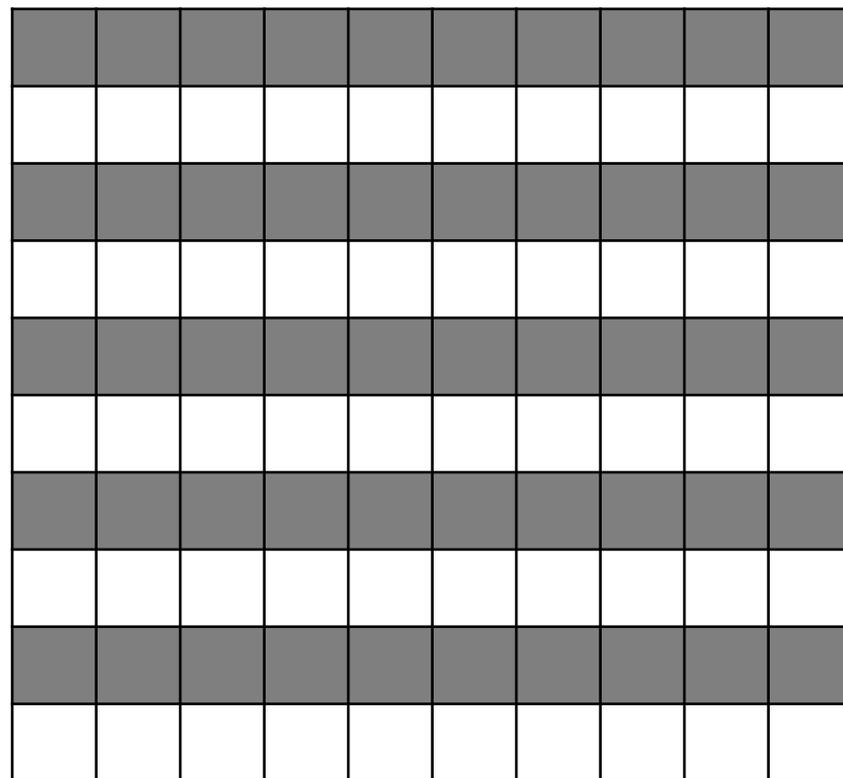


L-образными или Г-образными плитками невозможно
замостить доску 10x10.



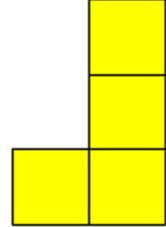
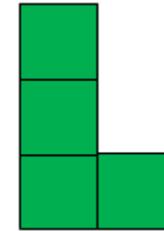
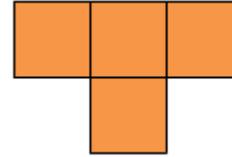
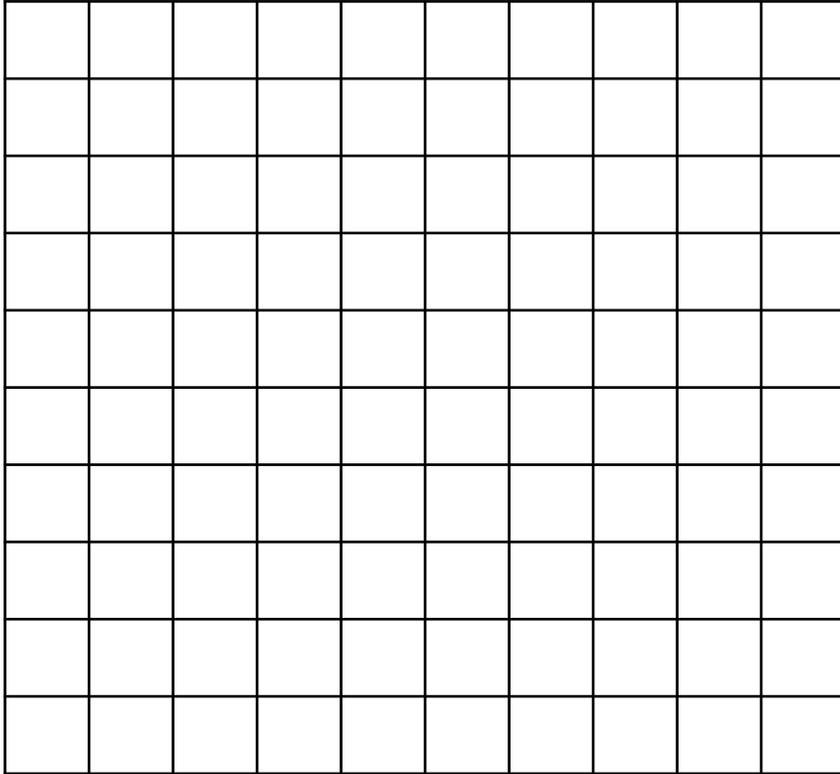
Решение. Каждая фигура б) или в) закрывает 3 черные клетки и одну белую (пусть таких фигур будет x штук) или 3 белые клетки и одну черную (пусть таких фигур будет y штук). Тогда

$$\begin{cases} x + y = 25, \\ 3x + y = 50; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 25, \\ 2x = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12,5, \\ y = 12,5. \end{cases}$$



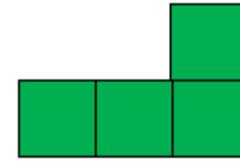
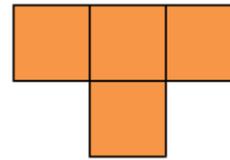
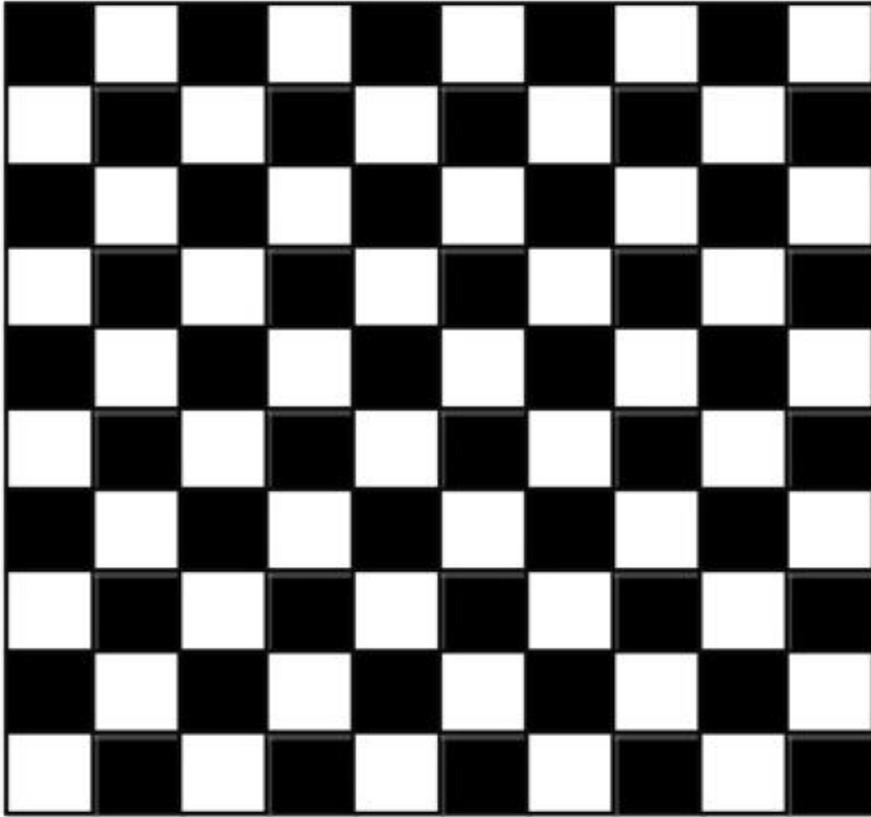
Т.к. количество фигур $x = 12,5 \notin N$, то полное замощение L-образными или Г-образными плитками невозможно.

№5. Клетчатая доска 10×10 замощается плитками двух типов: L-образными и T-образными. Плитки разрешается поворачивать и переворачивать. Какое наибольшее число L-образных плиток может участвовать в замощении?



1) Количество L-образных фигур меньше 25, т.к. полностью замостить доску только такими фигурами нельзя.

№5. Клетчатая доска 10×10 замощается плитками двух типов: L-образными и T-образными. Плитки разрешается поворачивать и переворачивать. Какое наибольшее число L-образных плиток может участвовать в замощении?



1) Количество L-образных фигур меньше 25, т.к. полностью замостить доску только такими фигурами нельзя.

2) Воспользуемся шахматной раскраской в 2 цвета. Любая T-образная плитка накрывает либо 3 белых и 1 черную клетку (пусть таких плиток будет a штук), либо 1 черную и 3 белых клетки (пусть таких плиток будет b штук). Пусть c – количество L-образных плиток, участвующих в замощении (каждая такая плитка закрывает 2 белые и 2 черные клетки).

3) Так как всего 50 белых клеток и 50 черных клеток, то

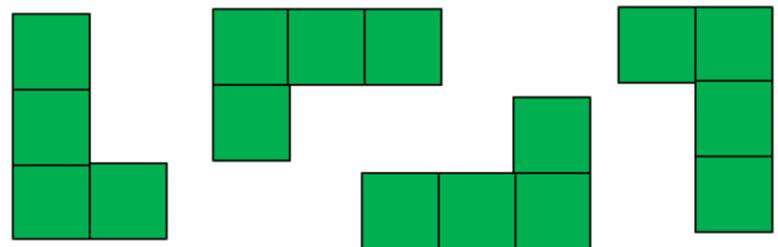
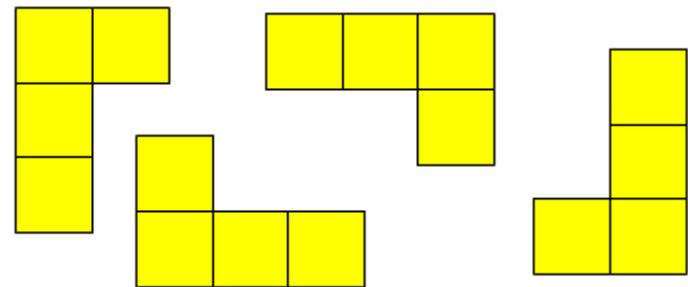
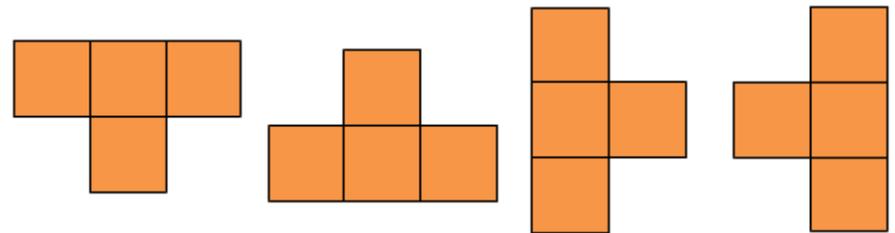
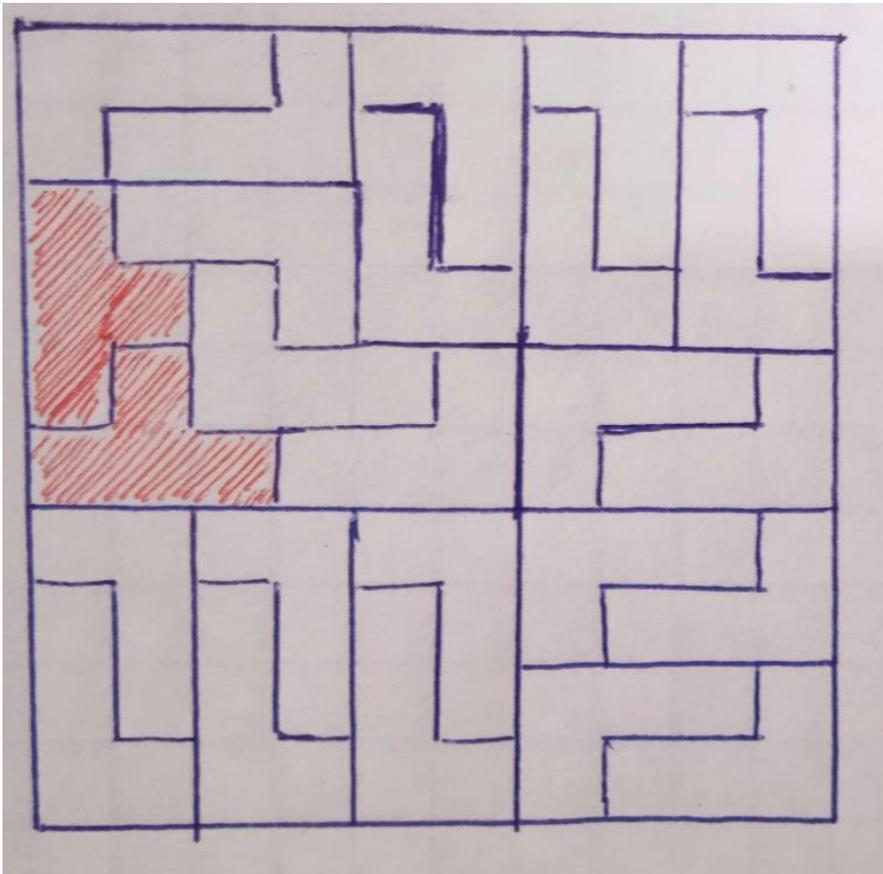
$$\begin{cases} 3a + b + 2c = 50, \\ a + 3b + 2c = 50. \end{cases}$$

Отняв из первого уравнения второе, получаем $2a - 2b = 0$, т.е. $a = b$.

4) Тогда общее число T-образных плиток $a + b$ – чётное число, причем $a + b \neq 0$. Тогда их не меньше 2, поэтому общее число L-образных плиток не более $25 - 2 = 23$. Осталось показать пример замощения из 23 L-образных плиток и 2 T-образных.

Задача

№5. Клетчатая доска 10×10 замощается плитками двух типов: L-образными и T-образными. Плитки разрешается поворачивать и переворачивать. Каждая плитка состоит из 4 клеток, равных по размеру клеткам доски. Какое наибольшее число L-образных плиток может участвовать в замощении?



Ответ: 23 L-образные плитки

Цель

- ❖ узнаете, как метод раскраски используется при решении задач на замощение плоских фигур;
- ❖ выясните, какие виды раскрасок чаще всего используются при решении задач на замощение;
- ❖ рассмотрите решения задач с помощью различных видов раскрасок;
- ❖ * решите хотя бы одну задачу с использованием раскраски

Тест

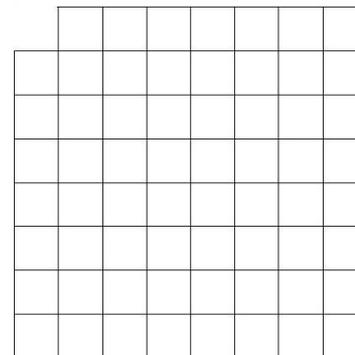
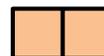
№1. Какая раскраска чаще всего используется при замощении плоских фигур Г-образными плитками :

а) диагональная;

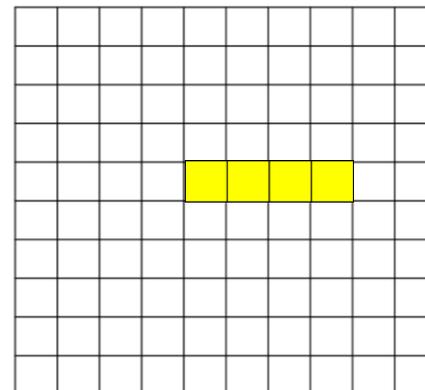
б) шахматная;

в) полосатая?

№2. У доски 8x8 выпилены две противоположные угловые клетки. Можно ли такую доску распилить на двухклеточные прямоугольники?



№3*. На доске 10x10 для «морского боя» стоит 4-палубный корабль. Какое наименьшее число выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить его?



Проверка теста

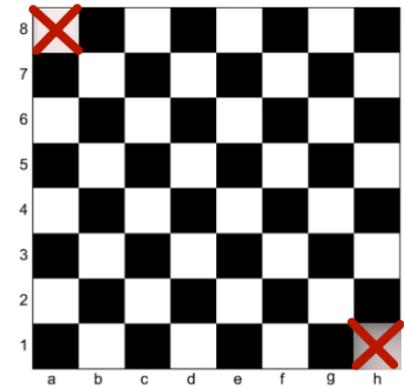
№1. Какая раскраска чаще всего используется при замощении плоских фигур Г-образными плитками :

а) диагональная;

б) шахматная;

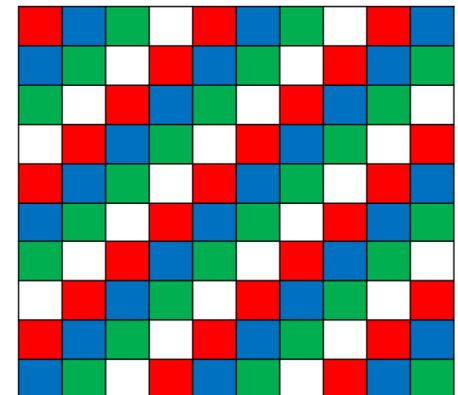
в) полосатая?

№2. У доски 8x8 выпилены две противоположные угловые клетки. Можно ли такую доску распилить на двухклеточные прямоугольники?



Решение. Любой двухклеточный прямоугольник, вырезанный из доски, содержит одну чёрную и одну белую клетку. Поэтому, если такое разрезание возможно, то количество черных и белых клеток должно быть одинаковым. Но так как вырезанные клетки одного цвета (противоположные клетки доски имеют один цвет), то для получившейся фигуры это условие не выполняется, а, значит, разрезать оставшуюся часть доски на прямоугольники нельзя.

№3. На доске 10x10 для «морского боя» стоит 4-палубный корабль. Какое наименьшее число выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить его?



Решение. При диагональной раскраске в четыре цвета любой 4-палубный корабль содержит в себе клетки всех 4 цветов. Для ранения корабля достаточно стрелять в клетки одного цвета. У нас меньше всего клеток белого цвета – 24. Значит достаточно прострелять все 24 белые клетки.



Раскраска спешит на помощь